NOMBRE Y MATRÍCULA:

7 - Junio - 2013 Tiempo: 2 horas

Segundo parcial: Funciones de dos variables PARTE 1 5,5 PTOS.TOTAL

1. Calcular los siguientes límites:

a) (0,3 ptos.) $\lim_{(x,y)\to(-2,1)} \frac{4yx^2}{x^2+y^2} = \frac{16}{5}$, por sustitución directa

b) (,0,7 ptos.) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4yx^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} \frac{4\rho^3 \sin\theta\cos^2\theta}{\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\in[0,2\pi)}} 4\rho\sin\theta\cos^2\theta = 0$

2. (,0,5 ptos)Calculando por rectas el límite en el origen de $f(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$, se obtiene que

a) Vale cero, pero no es continua en el origen
b) Para m=1 (m es la pendiente de la recta) vale cero , pero para m=2, vale 9/25
c) Vale cero y es continua en el origen RESPUESTA: b
d) Para m=1 (m es la pendiente de la recta) vale cero , pero para m=2, vale 7/25.

3. (0,7 ptos)Dada $f(x,y)=\frac{-2xy}{x^2+y^2}$, calcular su vector gradiente asociado:

SOLUCIÓN : $\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x^2y-2y^3}{(x^2+y^2)^2}, \frac{2y^2x-2x^3}{(x^2+y^2)^2}\right)$

4. (0,7 ptos)Calcular el plano tangente a $f(x,y)=1-\frac{1}{10}(x^2+4y^2)$ en el punto $(1,1,\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{5}, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-\frac{4}{5}$ Y el plano tangente será:

$$z-\frac{1}{2}=-\frac{1}{5}(x-1)-\frac{4}{5}(y-1) \Leftrightarrow 2x+8y+10z-15=0$$

5. (,0,7 ptos)La derivada direccional $f'_{\vec{d}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)}(1,1)$, siendo $f(x,y)=1-\frac{1}{10}(x^2+4y^2)$, vale:

SOLUCIÓN Calculamos $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{5}, \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-\frac{4}{5}$. Con ellas construimos el vector gradiente en el punto

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{-1}{5},\frac{-4}{5}\right)$$

Al tratarse de una función diferenciable en todo el plano (polinomio), será

$$f'_{\vec{d}=\left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)}(1,1) = \langle\nabla f(1,1), \left(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2}\right)\rangle = -1/\sqrt{2}$$

6. (0,5 ptos)Dado el recinto plano: $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 9\}$, calcular el transformado del mismo mediante un cambio a coordenadas polares:

SOLUCIÓN: Se trata de la media corona circular superior centrada en el origen de radios 1 y 3. Al transformarla se obtiene el rectángulo $[0,\pi]\times[1,3]$

7. (,0,7 ptos)Los puntos críticos de la función $f(x,y)=-x^3+4xy-2y^2+1$ son:

SOLUCIÓN

NOMBRE Y MATRÍCULA:

7 - Junio - 2013 Tiempo: 2 horas

Igualando a cero las derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2+4y=0 \\ 4x-4y=0 \end{cases} \quad (0,0),(\frac{4}{3},\frac{4}{3})$$

obtenemos dos puntos críticos

8. *(0,7ptos)*Calcular $\iint_R xy\,dx\,dy$ siendo $\boldsymbol{R}=\left[\boldsymbol{0},\frac{\boldsymbol{\pi}}{\boldsymbol{2}}\right]\times[\boldsymbol{0},\boldsymbol{\pi}]$

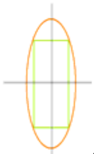
SOLUCIÓN: $\iint_{\boldsymbol{R}} xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \int_0^{\pi} y dy = \frac{\boldsymbol{\pi}^4}{\boldsymbol{16}}$

Segundo parcial: Funciones de dos variables PARTE 2 *4,5 PTOS.TOTAL*

1. *(2ptos)*Calcular el rectángulo de perímetro máximo que se puede inscribir en la elipse de ecuación $x^2+3y^2=1$

SOLUCIÓN

Llamemos (x,y) al vértice del rectángulo buscado que queda en el primer cuadrante, entonces, su perímetro vendrá dado por $P(x,y)=$



$4x+4y$. Por otra parte como dicho vértice debe de estar en la elipse, se cumplirá que $x^2+3y^2=1$. El problema planteado se reformula como el de $MAX\ P(x,y)=MAX(4x+4y)$, con la restricción $x^2+3y^2=1$. Usaremos el método del Lagrangiano. La ecuación de Lagrange queda

$$4=2\lambda x$$
$$4=6\lambda y$$
$$x^2+3y^2=1$$

Para resolverlo despejamos de las dos primeras ecuaciones

$$\lambda=\frac{2}{x}, \lambda=\frac{2}{3y}$$
$$x=3y$$
$$12y^2=1 \Rightarrow y=\pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Con lo cual, los PC son $\left(\frac{3}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-3}{2\sqrt{3}},\frac{-1}{2\sqrt{3}}\right)$, vértices del rectángulo buscado en el primer y tercer cuadrante. Con él se obtiene un perímetro de valor: P=$\frac{8}{2\sqrt{3}}$.

2.	(*2.5 ptos.)*Calcular la integral doble:
	$\iint_R (x^2+y)\,dxdy$, siendo $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, 1\leq x^2+y^2\leq 9\}$

SOLUCIÓN: El recinto de integración es la parte derecha de la corona circular centrada en el origen y de radios 1 y 3. Sus bordes circulares aconsejan un cambio a coord. polares y uso previo de simetría con respecto de la variable x: $\iint_R (x^2+y)\,dxdy$=

$$\left\{\begin{matrix} x=\rho Cos\theta \\ y=\rho Sen\theta \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi}\int_1^3 \rho^2\left(Cos\theta+Sen\theta\right)d\rho d\theta = \frac{52}{3}$$

$$=\left\{\begin{matrix} x=\rho Cos\theta \\ y=\rho Sen\theta \end{matrix} J=\rho\right\}=2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^3 \rho(\rho^2(\cos\theta)^2+\rho\sin\theta) = 10\,\pi$$